Colles de Maths - semaine 2 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Généralités de topologie

Exercice 1 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou métrique). Soit D une partie dense de E. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue qui admet un prolongement continu à $D \cup \{x\}$ pour tout $x \in E$. Montre que f admet un prolongement continu sur E.

Exercice 2 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou un espace métrique). Soit A et B deux parties non vides disjointes de E. On définit la distance de A à B par

$$d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

1. On suppose A fermé. A-t-on $d(A,B) > 0$? Et si l'on suppose B fermé ? réduit à un point ? compact ?
2. Donner des conditions suffisantes sur A, B ou E pour qu'il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $d(A,B) = d(x,y)$.
3. Si A et B sont fermés, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 3 (*) Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $||.||_\infty$ et

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C},\ f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

Montrer que E est fermé mais que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

Compacité

Exercice 4 (**) Soit E un espace vectoriel normé. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) E est de dimension finie.
(ii) La boule unité fermée de E est compacte.
(iii) La sphère unité de E est compacte.
(iv) De toute suite bornée de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

Indication : S'inspirer du cas où E est un espace préhilbertien.

Exercice 5 (**) Soit K un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et $f : K \to K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K,\ \ d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f possède un unique point fixe α et que si $x_0 \in K$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 6 (***) On note $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$.
Soit $a, b \in \ell^1(\mathbb{N})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$. On définit

$$K = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}),\ \forall n,\ a_n \leq u_n \leq b_n\}.$$

Montrer que K est un compact de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Applications linéaires et multilinéaires continues

Exercice 7 (*) Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle sur E.

1. A quoi peut-être égal l'adhérence de $\mathrm{Ker}(f)$?
2. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 8 (*) On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, et l'application f définie pour $x \in E$, par

$$f(x) = \int_0^1 x - \int_{-1}^0 x.$$

Montrer que f est linéaire continue et déterminer sa norme subordonnée. Est-elle atteinte, c'est-à-dire existe-t-il $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |||f|||\ ||a||$?

Exercice 9 (*) On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_1)$.

1. Soit $g \in E$. Montrer que l'application $\phi_g : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 g(t)\, f(t)\, dt$ est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme subordonnée.
2. Qu'en est-il si l'on considère la fonction $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \in L^1(]0,1])$?

Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 10 (**)

1. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{i\alpha n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n\geq 0}$.

Exercice 11 (*)
Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
Pour les meilleurs : et pour un fermé ?

Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 12 (*)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
2. Généralisation : Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout K compact de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F.

Exercice 13 (**) Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et X une partie bornée de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant X. Cette boule est-elle unique ?
Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.